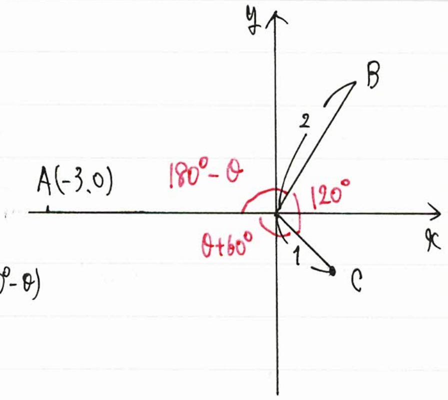
2010年　東大数学　文系第1問 ①

(1)

$\angle AOC = 360° - 120° - (180° - \theta)$

$= \theta + 60°$



$\triangle AOB = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin(180° - \theta)$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin\theta$

$= 3\sin\theta$

$\triangle AOC = \frac{1}{2} \times OA \times OC \times \sin(\theta + 60°)$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times \sin(\theta + 60°)$

$= \frac{3}{2}\sin(\theta + 60°)$

$\triangle AOB = \triangle AOC$ より

$3\sin\theta = \frac{3}{2}\sin(\theta + 60°)$

$2\sin\theta = \sin(\theta + 60°)$

$= \sin\theta\cos 60° + \cos\theta\sin 60°$

$= \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$\frac{3}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$\sqrt{3}\sin\theta = \cos\theta$

解法1：$\tan\theta$に帰着

$\theta = 90°$ のとき、$\sqrt{3}\sin 90° \neq \cos 90°$ より $\theta \neq 90°$ として、

$\cos\theta \neq 0$ なので

$\sqrt{3}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$　　$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$0° < \theta < 120°$ でこれを満たすのは、 $\underline{\theta = 30°}$ //

解法2：$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に $\sqrt{3}\sin\theta = \cos\theta$ を代入して、

$\sin^2\theta + (\sqrt{3}\sin\theta)^2 = 1$　　$\sin^2\theta = \frac{1}{4}$　　$\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

$0° < \theta < 120°$ のうち、これを満たすのは、 $\underline{\theta = 30°}$ //

解法3：合成

$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 0$ を合成して、

$2\sin(\theta - 30°) = 0$

$\sin(\theta - 30°) = 0$

$-30° < \theta - 30° < 90°$ でこれを満たすのは、

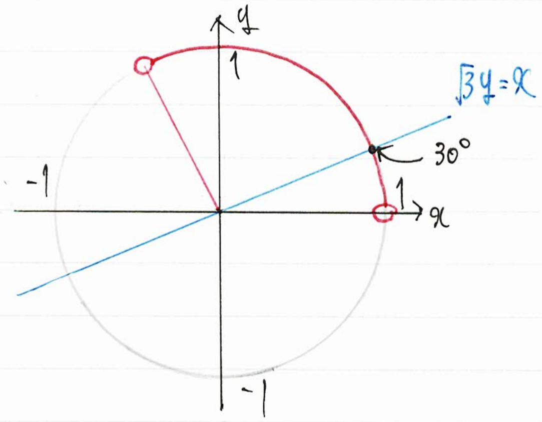
$\theta - 30° = 0°$　　$\underline{\theta = 30°}$ //

解法4：単位円の利用

$(\cos\theta, \sin\theta)$ は単位円の点である。

よって、$\sqrt{3}\sin\theta = \cos\theta$ は

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ と $\sqrt{3}y = x$ の交点を求める式であり、



交点を考えると、$\theta = 30°$

2010年　東大数学　文系第1問②

(2)

$S = \triangle OAB + \triangle OAC$

$= 3\sin\theta + \frac{3}{2}\sin(\theta+60^\circ)$

$= 3\sin\theta + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

同じ角度で、$\sin\theta$と$\cos\theta$の1次の和なので、合成

$= \frac{15}{4}\sin\theta + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$

$\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{7}\left(\sin\theta \times \frac{5}{2\sqrt{7}} + \cos\theta \times \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)$

$= \frac{3\sqrt{7}}{2}\sin(\theta+\alpha)$

（但し、$\cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}$　$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$　であり、
$0^\circ < \alpha < 45^\circ$ を満たす。）

$0^\circ < \theta < 120^\circ$　かつ　$0^\circ < \alpha < 45^\circ$　より
$0^\circ < \theta + \alpha < 165^\circ$　の範囲で、
$\sin(\theta+\alpha)$ の最大値は1（$\theta + \alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \theta = 90^\circ - \alpha$ のとき。）

よって、Sの最大値は、$\frac{3\sqrt{7}}{2} \times 1 = \underline{\frac{3\sqrt{7}}{2}}$ //

このとき、$\sin\theta$ は、

$\sin\theta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}} = \underline{\frac{5\sqrt{7}}{14}}$ //